Física Nuclear I

Física Nuclear y Subnuclear

25 de marzo de 2025

Introducción

Hasta este punto hemos hablado de la dispersión de Rutherford, de las partículas y de los experimnentos para detectarlas, como les mencioné ese no es exactamente el orden histórico.

Los experimentos de Rutherford, Geiger y Marsden mostraron que los átomos tienen un núcleo positivo, pero estudios posteriores para obtener más detalles al respecto mostraron que no sólo hay interacción coulombiana, hay otras fuerzas dentro, y que además de protones en el núcleo hay neutrones.

En 1932 Chadwick, seguramente acompañado de un equipo más amplio de investigadores, descubrió el neutrón. A nivel de partículas ya estudiamos los dos constituyentes nucleares, ahora veamos como se comporta este objeto compuesto llamado núcleo.

Propiedades del núcleo

Etiquetado

Un núcleo lo nombramos igual que al elemento que pertenece, puede ser H, He, C, Fe, U, etc., con ligeras diferencias. Tenemos un núcleo X, además de ser identificado por el nombre, como redundancia es identificado por su Z. Lo que define a un núcleo justo es eso, su número atómico. Además agregamos la cantidad de nucleones que posee, nótese que A no define que núcleo es, veamos porque.

Tenemos nuestro núcleo ${}^{A}X^{Z}$, con Z protones y $N - Z$ neutrones, de aquí podemos identificarlo como respecto a otro núecleo ${}^{A'}X'^{Z'}$

- *Isótopo*: núcleos con el mismo número de protones pero distinto número de nucleones, ${}^{A}X^{Z}$ y ${}^{A'}X^{Z}$ son isótopos del núcleo X.
- *Isóbaros*: núcleos con el mismo número de nucleones pero distinto número de protones, ${}^{A}X^{Z}$ y ${}^{A}X'^{Z'}$ son isóbaros.
- *Isómeros o resonancias*: núcleos exitados a niveles más altos de energía.

Masa del núcleo

Ya vimos un poco de la convención sobre como se etiqueta un núcleo y algunos de los términos a usar, ahora vemos las características del mismo.

Si tenemos un núcleo ${}^{A}X^{Z}$ y queremos obtener su masa uno pensaría que es tan fácil como sumar la masa de los protones y neutrones que contiene:

$$M({}^{A}X^{Z}) = M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n$$

Pero experimentalemente se encuentra que la masa del núcleo es menor a la suma de las masas de sus constituyentes, es decir

$$M(A,Z) < Zm_p + (A-Z)m_n$$

Por ello es que los núcleones están confinados en el núcleo, es un estado energéticamente más favorable. Definimos el *defecto de masa* como

$$\Delta M(A,Z) = M(A,Z) - Zm_p - (A-Z)m_n,$$

que es un valor negativo, y es proporcional a la energía de enlace nuclear, de la forma

$$B.E. = -\Delta M(A,Z)c^2$$

De esta forma $B.E.$ es la cantidad de energía necesaria para liberar a todos los nucleones de su estado ligado como núcleo, Si $\Delta M(A,Z)$ es negativa, y por ende $B.E.$ es positiva, el núcleo es ligado, mientras más grande sea el valor más ligado es.

La energía promedio para liberar un nucleón se da por la razón

$$\frac{B}{A} = \frac{B.E.}{A} = \frac{-\Delta M(A,Z)c^2}{A}$$

Este valor es útil pues pensaríamos que la energía de enlace por nucleón B/A, si todo se comportara bien, sería una constante, mas su comportamiento nos da más características de esta energía, como se puede ver en la figura 1. Para núcleos ligeros B/A oscila un poco, aumenta rápidamente y se satura, alcanzando un pico alrededor de los 9 MeV por nucleón, que en el eje de las X corresponde a un $A = 60$. Para A mayor, B/A decae lentamente. 8 MeV es un valor promedio para estos núcleos restantes, nos sirve para ver que esperamos obtener.

¿Cómo se calcula la masa de un núcleo a partir de datos que conocemos? Para obtener la masa la primera opción es buscar la tabla de todos los isótopos, eso es complicado y muy extenso, además de que puede cambiar dependiendo del experimento. Lo siguiente sería tener el defecto de masa o la energía de enlace. Usaremos esta opción pero con unos valores reducidos llamados *excesos de masa*

$$\delta(A,Z) = [M(Z,A)[uma] - A]keV/c^2\ c^2,$$

$M(Z,A)$ es el valor experimental, pero lo empaquetamos en un nuevo valor llamado exceso de masa, si queremos obtener la masa experimental de un núcleo basta con tener su exceso de masa y el número de nucleones.

Para obtener la energía de enlace a partir de los exceso de masa

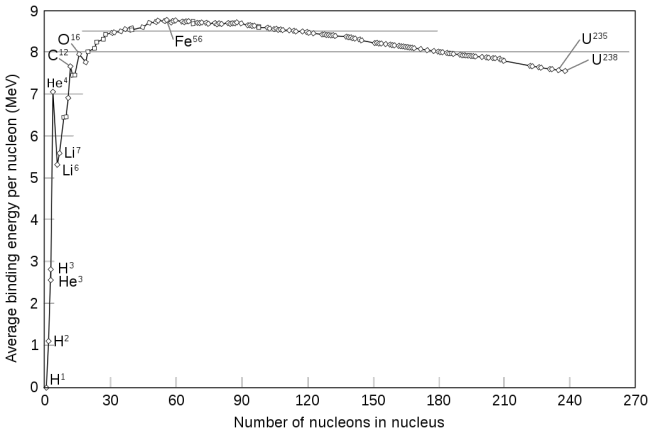


Figura 1: Gráfica de energía de enlace por nucleón contra número de nucleones A en el núcleo. Imagen de dominio público

$$\begin{aligned} B.E. =& Zm_p + (A-Z)m_n - M(A,Z) \\ =& Z(\delta(1,1)+1) + (A-Z)(\delta(1,0)+1) - (\delta(A,Z)+A) \\ =& Z\delta(1,1) + Z + A\delta(1,0) + A - Z\delta(1,0) - Z - \delta(A,Z) - A \\ =& Z\delta(1,1) + (A-Z)\delta(1,0) - \delta(A,Z) \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo. Tenemos el oxígeno estable $^{18}O^8$, el exceso de masa del núcleo es (revisando `https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/mass16.txt`) $\delta(16,8) = -4737{,}00135\ keV$, siempre usaremos la del protón $\delta(1,1) = 7288{,}97061 keV$ y la del neutrón $\delta(1,0) = 8071{,}31713\ keV$, ahora calculemos la energía de enlace del núcleo:

$$\begin{aligned} B.E. =& 8\delta(1,1) + 8\delta(1,0) - \delta(16,8) \\ =& 8(7288{,}9706 keV) + 8(8071{,}3171 keV) + 4737{,}0013 keV \\ =& 127619{,}3029 keV \end{aligned}$$

Un ejercicio útil para aplicar esto, aunque no sé que tan útil para la practica de la física nuclear, es obtener la energía de separación del último protón y el último neutrón de un núcleo

$$\begin{aligned} B.E.(A,Z) - B.E.(A-1,Z-1) =& Z\delta(1,1) + (A-Z)\delta(1,0) - \delta(A,Z) \\ & - ((Z-1)\delta(1,1) + ((A-1)-(Z-1))\delta(1,0) \\ & - \delta(A-1,Z-1)) \\ =& \delta(A-1,Z-1) + \delta(1,1) - \delta(A,Z) \end{aligned}$$

Algo similar se hace para el último neutrón.

Tamaños del núcleo

El tamaño en un sistema cuántico se define como el valor promedio del operador de coordenada en un estado propio, en un átomo este valor promedio de coordenada se toma en el electrón más externo, pero como en el núcleo es difícil tener una expresión exacta de las fuerzas que actúan se harán otras aproximaciones.

Pensemos en la dispersión de Rutherford, si el impacto de la partícula con el núcleo es frontal, la partícula será retro dispersada, la distancia de máxima aproximación se da como:

$$r_0^{min} = \frac{ZZ'e^2}{E}$$

que se obtiene sacando el mínimo en la ecuación del campo eléctrico. Esta distancia de mínima aproximación es frontal, la partícula (sea una α) rebota y lo más cerca que está del núcleo es la primera aproximación al tamaños del núcleo. Es una mala aproximación pues está una barrera coulombiana antes de que el α pueda acercarse más al núcleo. Por ejemplo, para el oro y la plata esta aproximación da $R_{Au} \lesssim 3{,}2 \times 10^{-12} cm.$ y $R_{Ag} \lesssim 2 \times 10^{-12} cm$, que no son muy buenas aproximaciones (más adelante probaremos mejores).

Si aumentamos la energía de la α para pasar la barrera coulombiana llegamos al extremo de que $r_0^{min} \to 0$. Una mejor manera de investigar el núcleo a altas energía es usar un electrón, así evitamos la acción de la interacción nuclear fuerte, con energía suficiente puede deducir la distribución de cargas dentro del núcleo, el radio de esta distribución es una mejor aproximación al radio nuclear. A altas energía el momento magnético del electrón también interfiere en la interacción. Motts amplió la teoría de Rutherford para incluir la cuántica y estudios sistemáticos de electrones relativistas chocando con el núcleo se deben a Robert Hofstadter.

Para una distribución de cargas $\rho(\overrightarrow{r})$ podemos definir el factor de forma de la distribución a partir de la transformada de Fourier:

$$F(\overrightarrow{q}) = \int_{\text{todo el espacio}} d^3 r \rho(\overrightarrow{r}) e^{\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}$$

Este factor de foma altera la sección eficaz diferencial de las colisiones elásticas de electrones desde centros puntuales:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = |F(\overrightarrow{q})|^2 \left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right)_{Mott}$$

que a su vez

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = 4cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford}$$

Que le agrega la parte cuántica a la sección eficaz de Rutherford.

La siguiente aproximación se puede hacer con hadrones de altas energías, como piones y protones, rompen la barrera coulombiana pero de manera análoga a los electrones ahora pueden deducir la forma del núcleo pero sólo tomando en cuenta la fuerza nuclear fuerte.

Todas estas aproximaciones nos dan un valor para el radio del núcleo:

$$\begin{aligned} R &= r_0 A^{\frac{1}{3}} \\ &\approx 1{,}2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} cm. = 1{,}2 A^{\frac{1}{3}} fm. \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el $^{197}Au^{79}$, su radio sería $R \approx 1{,}2(197)^{\frac{1}{3}} fm = 6{,}9824 fm$, un órden de magnitud menor que la aproximación anterior.

Espines nucleares y momentos dipolares

Rememorando la parte de espín en partículas elementales, sabemos que los protones y neutrones tienen espín $\hbar/2$ y un momento angular (entero) asociado. La suma que ya conocemos de momento angular define el momento angular del núcleo, pero hay detalles. Por el momento la parte fenomenológica nos dice que:

- Núcleos con número A par tienen espín nuclear entero
- Núcleos con número A impar tienen espín nuclear semi-entero
- Núcleos con número par de protones y número par de neutrones (par-par) tienen espín nuclear cero
- Núcleos muy grandes tienen espín nuclear muy pequeño en su estado base
- Hace pensar que los nucleones dentro del núcleo están fuertemente apareados

Por otro lado, el momento dipolar magnético para una partícula cargada está dado por

$$\overrightarrow{\mu} = g \frac{e}{2mc} \overrightarrow{S},$$

con e la carga, m la masa y $\overrightarrow{S}$ el espín de la partícula cargada; g es el factor de Landé y es diferente para distintas partículas. Para los nucleones definimos el magnetón nuclear (similar al magnetón de Bohr para electrones):

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c},$$

y a partir de él se define el momento magnético del protón y en neutrón

$$\mu_p \approx 2{,}79\mu_N, \ \mu_n \approx -1{,}91\mu_N.$$

Son momentos magnéticos bastante grandes y anómalos, sobre todo para el neutrón (¡que es neutro!), lo que hizo sospechar que eran partículas compuestas.

Estabilidad de los núcleos

Ya les he contado, ya saben un poco de su experiencia, que hay núcleos estables y otros que decaen fácilmente en otros núcleos. Si observamos lo que los experimentos y observaciones nos dicen, para $A \lesssim 40$ el número de protones y neutrones se mantiene igual (para los núcleos estables, recuerden), es decir $N = Z = A/2$, pero para núcleos más pesados $N \approx 1{,}7Z$, en promedio hay 1,7

veces más neutrones que protones, casi el doble pero no llega a tanto. El exceso de neutrones evita que la inestabilidad por carga aumente. Una interpretación como islas puede verse en al figura 2.

Las observaciones además nos dicen que los núcleos más estables más abundantes suelen ser par-par.

N	Z	Número de núcleos estables
Par	Par	156
Par	Impar	48
Impar	Par	50
Impar	Impar	5

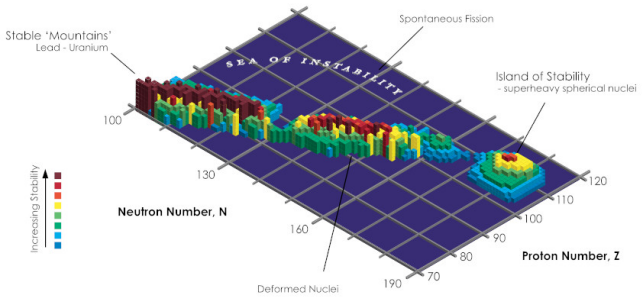


Figura 2: Islas de estabilidad nuclear. Créditos de la imagen: "File:Island of Stability.svg" by InvaderXan is licensed under CC BY-SA 3.0.

Inestabilidad del núcleo

La radiactividad fue descubierta por accidente en 1896 en el trabajo de Henry Becquerel, observando un efecto de radiactividad natural en las sales de uranio, un núcleo bastante pesado.

Ya hablamos de los tres tipos de radiación

- α, núcelos de $^4He^2$
- β, electrones
- γ, fotones de muy alta energía

En esos primeros estudios (un poco después de Becquerel) se descubrió que para detener la radiación β se requiere una pared de plomo, de apenas $3mm$. para las energías en que se encuentra esta radiación de forma natural. En cambio se requiere sólo una hoja de papel para detener partículas α, y para los γ se requieren varios centímetros de plomo para absorberlos.

Fuerza nuclear

La fuerza nuclear es un tópico que ya se ha tratado en el curso. Sabemos que es de corto alcance, actúa sobre los hadrones y por ello podemos tener un

núcleo formado por protón y neutrón (el deuterio, que a pesar de no ser estable sí existe por un momento). Pero sabemos que hay dos tipos ¿porqué referirse como si fuera una sola? Ya veremos porque.

El hecho de que la energía de enlace por nucleon tienda a una constante es muestra del corto alcance de la fuerza nuclear, se satura. Además de ser atractiva tiene un núcleo repulsivo (lo que evita que colapse el núcleo), por ello podemos pensar esta fuerza como un pozo de potencial (como el de la figura 3). Por ser un pozo de potencial de inmediato sabemos que hay estados ligados cuantizados y que de ahí deriva un modelo que se parecerá mucho al modelo de nivles atómicos, pero de eso ya hablaremos en la próxima sección.

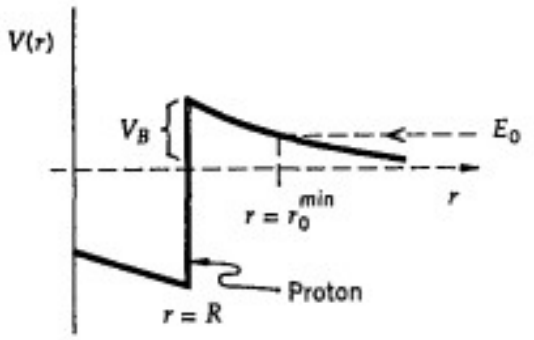


Figura 3: Esquema del potencial nuclear. Tomado del libro de Das y Ferbel

Modelos nucleares

Los modelos que trataremos son fenomenológicos, por las complicadas características de la fuerza nuclear fue necesario tomar ese camino. Ya en la sección anterior hablamos de algunas de las características que definen a estos modelos. Hay tres tipos de modelos:

- Modelos empíricos
- Modelos de partícula independiente
- Modelos de interacción fuerte

Modelo de la gota

Los experimentos muestran que el núcleo parece tener una estructura esférica, con un radio proporcional a la cantidad de nucleones contenidos, eso es lo primero que nos hace pensar en una gota, además de la incompresibilidad y su estructura hay algunas características extras que asemejan a un fluido. Pero en este modelo las características particulares de los nucleones son desechadas. Este modelo fue propuesto por Bohr y Weizsäcker.

La gota está formada por nucleones como si fueran moléculas, los del interior están saturados, es dificil desprenderlos, y los de la orilla no lo están, se separan más fácil, lo que asemeja a la tensión superficial.

A partir de estas consideraciones podemos ir aproximando la energía de ligadura

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}}$$

El primer término se refiere a la energía en el volumen, saturada, el segundo a la tensión superficial. Núcleos más ligeros tienen más nucleones en la superficie que en el volumen. Explica un poco el rápido crecimiento al inicio de la gráfica B/A.

Centrándonos de nuevo en esa gráfica B/E, vemos que a altas energías el valor decrece, lentamente, pero decrece. Eso puede deberse a la repulsión coulombiana entre protones

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

Todas estas son consideraciones clásicas, pero hace falta agregar la estabilidad del núcleo. Recordemos que lo más estable para núcleos ligeros es $N = Z$, los núcleos par-par son más estables sin importar si son ligeros o pesados, los núcleos par-impar ya no son tan estables, y los impar-impar son los menos estables. Requerimos un término que responda a ello (efectos muy probablemente cuánticos)

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

se asume que los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son positivos, de esta forma los signos también nos dan información de la fenomenología (cómo aportan a la energía de ligadura y por lo tanto a la estabilidad del núcleo). El cuarto término nos asegura que si $N \neq Z$ la energía de enlace es mayor, por ende el núcleo es más inestable. Para núcleos ligeros el tercer término no afecta tanto, y el cuarto no aporta nada a disminuir la energía de enlace con $N = Z$. En el quinto término el signo positivo se elige para núcleos par-par, negativo para los núcleos impar-impar y $a_5 = 0$ para núclos impar-par.

Los valores de los coeficientes se obtinen de ajustar el modelo a los datos empíricos

$$\begin{aligned} a_1 \approx 15{,}5\ MeV, \quad a_2 \approx 16{,}8\ MeV, \quad a_3 \approx 0{,}72\ MeV, \\ a_4 \approx 23{,}3\ MeV, \quad a_5 \approx 34\ MeV. \end{aligned}$$

Se puede sustituir en la fórmula para masas respecto a la energía de ligadura

$$M(A,Z) = Z m_p + (A-Z) m_n - \frac{B.E.}{c^2}$$

y obtener una relación de la fórmula semi empírica con la masa

$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{a_1}{c^2}A + \frac{a_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^2}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2}\frac{(N-Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2}A^{-\frac{3}{4}}$$

Es la fórmula semi-empírica de Bethe-Weizsäcker para masas nucleares, puede dar información sobre estabilidad de núcleos aún no conocidos (de cualquier A y Z), y es de mucha ayuda para entender la fisión nuclear.

Modelo de gas de Fermi

Si queremos agregar las cuestiones cuánticas que conocemos (sobre todo las relacionadas con el espín) el siguiente modelo es el de gas de Fermi, el primero en implementar la parte cuántica. Considera al núcleo un gas de protones y neutrones confinado en una región pequeña el espacio, el núcleo. De manera análoga a los electrones en el átomo, los nucleones llenarán niveles de energía cuantizados. Esos niveles serán distintos para protones y para neutrones, el primero debe incluir la repulsión coulombiana, el ancho estará dado por el radio nuclear y la profundidad puede ajustarse de acuerdo a la energía de enlace.

El pozo se va llenando (vamos acomodando protones o neutrones) de abajo hacia arriba, los niveles más bajos son los más estables, el último nivel completamente lleno se le llama nivel de Fermi y se denota por la energía E_F. Si más allá de ese nivel ya no hay nucleones, la energía de enlace es E_F, si hay uno fuera de capa cerrada, ese mismo definen la energía de enlace del último nucleón.

La profundidad de los pozos para protones y neutrones son distintas, de no ser así los núcleos pesados tendrían niveles de energía por arriba para neutrones, haciendo sólo la parte neutra más inestable con una energía de enlace distinta, pero eso no se observa en el experimento. Un esquema de los pozos se puede ver en la figura 4.

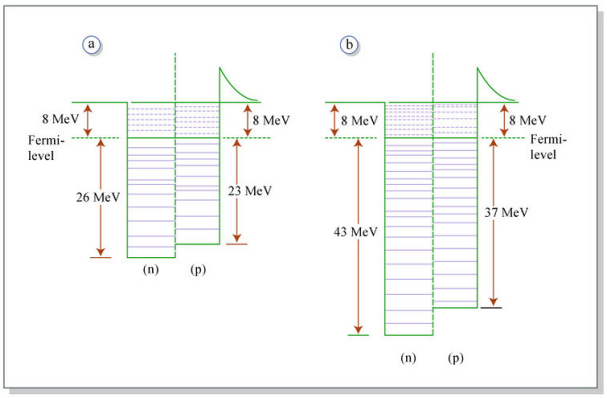


Figura 4: Esquema de los pozos de potencial en el modelo de Fermi. Figure by MIT OpenCourseWare from Marmier and Sheldon, con licencia CC-BY-NC-SA

Hagamos un cálculo sencillo de la energía de Fermi. La relación del momento y la energía de Fermi

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

Ignorando fermiones más allá de este nivel tenemos el volumen de estados en el espacio de momentos

$$V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

Si V es el volumen físico del núcleo entonces el volumen total de estados, o *espacio fase* está dado por

$$\begin{aligned} V_{TOT} =& V \times V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 \\ =& \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A (r_0 p_F)^3 \end{aligned}$$

Que es proporcional a la cantidad total de estados cuánticos del sistema (están bien ordenados y cubren el volumen). Recordando la incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

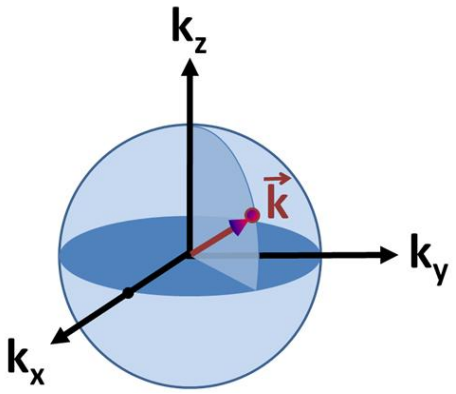


Figura 5: El espacio fase, imagen de Brews ohare con licencia CC-BY-SA

Que a su vez nos dice el mínimo volumen que se le puede asociar a un estado físico en el espacio fase

$$V_{estado} = (2\pi\hbar)^3 = h^3$$

Entonces el número de fermiones que pueden llenar los estados

$$n_F = 2\frac{V_{TOT}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A(r_0 p_F)^3 = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3,$$

el 2 se debe al principio de exclusión de Pauli, cada estado puede estar ocupado por dos fermiones de espín contrario.

Supongamos que $N = Z$ (para núcleos ligeros es completamente válido, para más pesados es una aproximación) y además suponemos que el estado de Fermi está lleno

$$N = Z = \frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3$$
$$\text{despejando } p_F = \frac{\hbar}{r_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ese momento de Fermi depende de puras constantes, es independiente del número de nucleones, ahora

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 33\ MeV$$

Si tomamos $B/A \approx 8\ MeV$ será la profundidad a la que ajustaremos nuestro pozo para tomar en cuenta la energía de enlace, entonces

$$V_0 = E_F + \frac{B}{A} \approx 40\ MeV$$

Valor que se ajusta con lo obtenido por otros métodos. Este modelo es útil al hablar de estados excitados del núcleo y justifica el termino a_4 de la fórmula semi-empírica.

Modelo de capas

El modelo de capas es un modelo de partícula independiente, a diferencia de gas de Fermi ahora tratamos de identificar el potencial. Para ello recordemos un poco el modelo de capas atómico.

Las energías están cuantificadas, cada nivel energético es etiquetado por el número principal cuántico n con valores enteros. Para cada valor de n hay estados degenerados en energía con momento angular orbital ℓ, también con valores enteros desde 0 hasta $n-1$.

Para cada número ℓ a su vez hay $2\ell + 1$ subestados que corresponden a las distintas proyecciones del momento angular orbital. Debido a la simetría rotacional todos los estados de proyección de momento angular están degenerados en energía. A su vez las partículas tienen un momento angular intrínseco s entero o semi-entero que tiene $2s + 1$ proyecciones.

Así cada estado de un electrón en el átomo está dado por el conjunto de números cuánticos (n, ℓ, m_ℓ, m_s). En total de estados degenerados se tienen:

$$
\begin{aligned}
n_d &= 2\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) \\
&= 2\left(2\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1}1\right) \\
&= 2\left(2\times\frac{1}{2}n(n-1)+n\right) \\
&= 2(n^2-n+n) = 2n^2
\end{aligned}
$$

Si hay una dirección preferida del espacio, por ejemplo cuando se pone un campo magnético a lo largo del eje z, se rompe la degeneración, y entonces para cada combinación de números cuánticos tenemos estados distintos de energía, es decir, la energía depende también de m_ℓ y m_s.

A nivel de potencial este rompimiento de la degeneración sucede al agregar al término del potencial coulombiano el producto vectorial $-\overrightarrow{\mu}\cdot\overrightarrow{B}$.

Interacciones debidas al acoplamiento espín-orbita (en este caso el campo magnético que afecta al espín del electrón es el derivado del momento angular órbital del núcleo) puede romper otras degeneraciones, derivando en la estructura fina que es estudiada como tema muy particular de la física atómica, rara vez vista en un curso básico. Pero estos acoplamientos también son útiles para describir características del núcleo.

Podemos ir viendo el sistema cuántico por niveles de degeneración, sin tomar en cuenta estructura fina el átomo tiene n niveles de energía donde acomodar electrones, cada uno de estos niveles de energía tienen subcapas etiquetadas por el valor de ℓ. Al introducir la interacción coulombiana electrón-electrón cada nivel n se divide en varios niveles, de acuerdo al valor de ℓ. Si ℓ es muy grande el átomo se vuelve menos esférico y hace al átomo menos estable. Si todas las capas y subcapas están llenas sabemos que la suma de los números cuánticos m_ℓ y m_s son cero, es decir que hay un apareamiento muy fuerte para capas cerradas, en esos casos $\overrightarrow{L}=0=\overrightarrow{S}$ y por tanto $\overrightarrow{J}=\overrightarrow{L}+\overrightarrow{S}=0$.

¿Qué átomos terminan en capa cerrada? Los gases nobles, que son inertes. Tienen números atómicos: $Z=2,10,18,36,54$, que son los números mágicos de física atómica.

En física nuclear también existe evidencia de números mágicos nucleares, para este número de protones o neutrones el núcleo es más estable, estos valores son

$$
\begin{aligned}
N =& 2,8,20,28,50,82,126 \\
Z =& 2,8,20,28,50,82.
\end{aligned}
$$

Los núcleos con alguno de esos valores en Z o N son muy estables y se llaman núcleos mágicos, los que tienen N y Z con valores mágicos, ambos, son núcleos doblemente mágicos, aún más estables ($^4He^2$, $^{16}O^8$, $^{208}Pb^{82}$).

Además los núcleos mágicos tienen más isótopos e isótonos (mismo número de neutrones, distinto de protones) estables que sus vecinos no mágicos (Sn, con $Z=50$, tiene diez isótopos estables, mientras que In con $Z=49$ y Sb con

$Z = 51$ sólo tienen dos isótopos estables), esto, los números mágicos, el hecho de que para núcleos mágicos el momento cuadrupolar se haga cero, nos hace pensar de una estructura de capas en el núcleo.

Listo, hagamos un modelo de capas como en el átomo. Pero no, tenemos problemas

- En el núcleo a diferencia del átomo no tenemos un núcleo central que provee la energía de enlace
- Debemos considerar entonces un potencial central efectivo
- La fuerza nuclear no es tan bien entendida como la fuerza coulombiana del átomo.

A pesar de estos problemas consideremos que hay un potencial central, la ecuación de Schrödinger para eso:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 + V(\overrightarrow{r})\right)\psi(\overrightarrow{r}) = E\psi(\overrightarrow{r})$$
$$\text{ó} \quad \left(\overrightarrow{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\overrightarrow{r}))\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0,$$

E es el valor propio de energía, y dado que el potencial se considera con simetría esférica, los estados propios de energía también son estados propios del operador de momento angular (el operador de momento angular conmuta con el Hamiltoniano, hay simetría esférica). Usemos coordenadas esféricas y etiquetemos los estados propios de energía por los números cuánticos de momento angular

$$\overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\overrightarrow{L}^2,$$

para $\overrightarrow{L}^2$ con estados propios los armónicos esféricos y sus valores propios $\hbar^2\ell(\ell+1)$. Podemos dividir la ecuación de Schrödinger en su parte radial y la parte esférica, ya saben como van las funciones para la parte radial y el número cuántico asociado.

Pero para sacar más información debemos definir un potencial, dos casos populares es el pozo infinito y el oscilador armónico (es un potencial central). Ambos casos no son realistas pues no toman en cuenta la posibilidad del tunelaje cuántico (cómo si sucedería en un pozo finito, pero este sólo da soluciones numéricas que no nos dicen mucho de las características del núcleo), pero para un estudio cualitativo sirven muy bien.

Pozo infinito de potencial

Definimos el potencial como

$$V(\overrightarrow{r}) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \geq R \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

con R el radio nuclear. La ecuación radial para $0 \leq r \leq R$ toma la forma

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{n\ell}-\frac{\hbar\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)\right)u_{n\ell}(r)=0$$

con soluciones regulares en el origen dadas por las funciones oscilatorias Bessel esféricas $u_{n\ell}(r)=j_\ell(k_{n\ell}r)$, con

$$k_{n\ell}=\sqrt{\frac{2mE_{n\ell}}{\hbar^2}}.$$

Como el pozo es infinito los nucleones no pueden escapar, la función radial debe hacerse cero en las fronteras

$$u_{n\ell}(R)=j_\ell(k_{n\ell}R)=0,\quad \ell=0,1,2,3,...\ y\ n=1,2,3,...\text{ para cualquier }\ell$$

donde las funciones Bessel esféricas tienen varios ceros. La única degeneración aquí correspone a las proyecciones m_ℓ, por ello cada nivel puede llenarse con $2(2\ell+1)$ protones o neutrones (por el espín tenemos el doble de capacidad). De esta forma las capas cerradas suceden, para $n=1$,

$$\mathbf{2}, 2+6=\mathbf{8}, 8+10=\mathbf{18}, 18+14=\mathbf{32}, 32+18=\mathbf{50}, ...$$

Y casi lo logramos, pero fallamos en obtener el 20 y el 28, y les adelanto que ni el 82 ni 126. Aquí tomamos $n=1$, para otro valor de n se obtineen otros valores, pero no mejor. No es que hayamos hecho todo esto en vano, sino que nos da una idea de como aproximarnos, pero en definitiva este potencial no reproduce los números.

Oscilador armónico

La ecuación radial de un oscilador armónico en tres dimensiones

$$V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2,$$

la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{n\ell}-\frac{1}{2}m\omega^2r^2-\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)\right)u_{n\ell}=0. \tag{1}$$

Las soluciones son polinomios de Laguerre con valores propios dados por

$$E_{n\ell}=\hbar\omega\left(2n+\ell-\frac{1}{2}\right),\ n=1,2,3,..\ y\ \ell=0,1,2,...\text{ para cualquier }n.$$

Si definimos $\Lambda=2n+\ell-2$, entonces los valores propios de la energía

$$E_{n\ell}=\hbar\omega\left(\Lambda+\frac{3}{2}\right),\ con\ \Lambda=0,1,2,...,$$

teniendo en cuenta que el estado base, para $\Lambda=0$ no tienen energía cero. Haciendo el mismo análisis del caso anterios, viendo las degeneraciones y la cantidad de neutrones o protones que llenan cada capa podemos saber como se

cierra capa en este caso, pero cabe mencionar que además de la degeneración en m_ℓ hay una degeneración extra pues ciertas combinaciones de n y ℓ dan el mismo valor de Λ.

Las capas se cierran con

$$n = 2, 8, 20, 40, 70$$

De nueva cuenta tenemos unos pocos, pero no todos.

Potencial espín-órbita

En 1949 Maria Goeppert Mayer y Hans Jensen propusieron, para corregir estos problemas, siguiendo el ejemplo del modelo atómico, que había un fuerte acoplamiento espín-órbita responsable de esta diferencia

$$V_{TOT} = V(r) - f(r)\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{S},$$

con los operadores de momento angular orbital y de espín, $f(r)$ es una función arbitraria de la coordenada radial. En física atómica esta interacción rompe la degenaración $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ en dos niveles, lo mismo sucede en física nuclear, aunque ahora con una función de r.

El operador de momento angular

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{J} =& \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S} \\
\overrightarrow{J}^2 =& \overrightarrow{L}^2 + \overrightarrow{S}^2 + 2\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{S} \\
\text{o despejando } \overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{S} =& \frac{1}{2}(\overrightarrow{J}^2 - \overrightarrow{L}^2 - \overrightarrow{S}^2),
\end{aligned}$$

ambos operadores conmutan, por ello podemos definir así el cuadrado de ambos operadores. Si definimos un estado por sus números cuánticos ℓ, s, j, m_j, nos quedamos con los primeros tres y obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{S}\rangle &= \langle\frac{1}{2}(\overrightarrow{J}^2 - \overrightarrow{L}^2 - \overrightarrow{S}^2)\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \\
&= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}] \\
&= \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2}\ell & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2}(\ell+1) & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

De aquí se obtienen los corrimientos en energía

$$\begin{aligned}
\Delta E_{n\ell}\left(j = \ell + \frac{1}{2}\right) =& -\frac{\hbar^2\ell}{2}\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r) \\
\Delta E_{n\ell}\left(j = \ell - \frac{1}{2}\right) =& \frac{\hbar^2(\ell+1)}{2}\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r)
\end{aligned}$$

La diferencia entre estos dos corrimientos

$$\begin{aligned}\Delta =&\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell-\frac{1}{2}\right)-\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell+\frac{1}{2}\right)\\ =&\hbar^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r)\end{aligned}$$

Para mayores valores de ℓ esta diferencia aumenta, de tal forma que el nivel desdoblado se cruce con uno de energía menor, pero además notemos que para una j mayor el nivel se desdobla hacia abajo, como se puede ver en la figura 6.

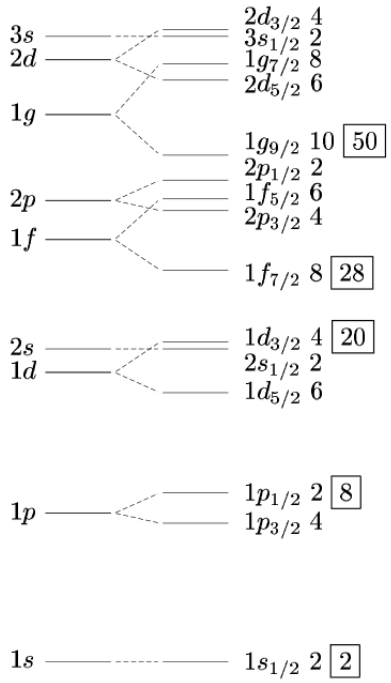


Figura 6: Diagrama de niveles para el modelo de capas, imagen de Bakken con licencia CC-BY-SA-3.0

Como en el modelo de Fermi debemos considerar los efectos de la barrera de potencial coulombiano para protones, esto hace un desplazamiento en los niveles de energía, pero las características cualitativas no se ven afectadas.

Ya vimos bastante del armado de este modelo, ahora ¿cuáles son su logros? El más importante es que puede predecir de manera correcta el espín y la paridad de un gran número de núcleos con A impar. Como hemos mencionado cada nivel se llena con un número par de protones o neutrones, cada subcapa tienen dos protones o dos neutrones como máximo, una con proyección del espín hacia arriba y otro con proyección hacia abajo, hay un fuerte apareamiento y aportando cero al momento angular total. Esto último está de acuerdo con los experimentos, los núcleos par-par tienen momento angular total cero. Pero si

hay un neutrón o protón sin aparear, éste dará el valor de momento angular total del núcleo, pero sólo uno, si hay un neutrón y un protón sin aparear el modelo no puede decir nada de su espín.

Además nos puede dar la paridad de estos mismo núcleos, consideramos los isóbaros $^{13}C^6$ y $^{13}Ni^7$ (núcleos espejo). Los 6 protones de $^{13}C^6$ y los 6 neutrones de $^{13}Ni^7$ están apareados, de esos no nos ocupamos, lo que queremos ver es la configuración de los neutrones en $^{13}C^6$ y la de los protones en $^{13}Ni^7$, de manera análoga se acomodarán

$$(1S_{\frac{1}{2}})^2(1P_{\frac{3}{2}})^4(1P_{\frac{1}{2}})^1$$

El último nucleón no apareado cae en la capa $1P_{\frac{1}{2}}$, entonces ambos núcleos tienen un espín de $\frac{1}{2}$ y una paridad de $(-1)^{\ell=P=1} = -1$, entonces para ambos núcleos damos su paridad y espín como $\frac{1}{2}^-$, que es el valor experimental.

Este modelo también es útil para calcular momentos magnéticos de los núcleos. Sólo en núcleos pesados las predicciones no son buenas.

Modelo colectivo

Las predicciones del modelo de capas fallan en núcleos pesados, no sólo en espín y paridad pero sobre todo en momentos cuadrupolares magnéticos, aún para núcleos pesados con doble capa cerrada en los que parece que todo ajusta de maravilla se tienen discrepancias en el momento cuadrupolar. El problema como apunta esta última y significativa diferencia parece radicar en la suposición de que el núcleo es esférico, mientras más pesado menos lo es.

El modelo colectivo es de interacción fuerte, de manera análoga al modelo de la gota. Propuesto por Aage Bohr, Ben Mottelson y James Rainwater, las propiedades se asocian a un movimiento superficial de la "gota" nuclear, las propiedades de núcleos pesados se podían obtener suponiendo que la gota no tenía una forma esférica.

El modelo de capas funciona bastante bien ¿debemos desecharlo? No, debemos encontrar un punto de contacto entre los modelos. El modelo de la gota da más peso al movimiento colectivo de los nucleones, el modelo de gas de Fermi y de capas piensa en partículas independientes. El punto de conexión entre estos modelos está en el modelo colectivo, se considera un núcleo de nucleones fuertemente ligado, y una capa con los nucleones de valencia que se comportan como las moléculas superficiales de una gota de agua. Este movimiento rompe la esfericidad del núcleo, se puede ver como una perturbación que provoca que los nucleones de valencia pasen de un estado sin perturbar en el modelo de capas a un estado perturbado en el modelo colectivo.

El modelo colectivo puede pensarse como un modelo de capas pero con potencial no esférico, esta no esfericidad rompe las simetrías rotacionales, dando distintas propiedades y estados ante rotaciones y vibraciones.

Consideramos el núcleo como un elipsoide

$$ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$$

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

Como puede verse, los cálculos se volverán más complejos, no entraremos en los detalles sólo nos quedaremos con las predicciones. Ahora se agregan niveles de libertad rotacional y vibracional, tendremos un momento rotacional I asociado.

Deformaciones nucleares

Las discrepancias en el momento cuadrupolar llegan a ser tan grandes para núcleos, sobretodo pesados, que no pueden explicarse por una partícula individual, hay una aportación colectiva.

El momento cuadrupolar se define como:

$$\mathbb{Q} = Z \int d^3r(3z^2 - r^2)\rho(r) \tag{2}$$

Si consideramos un elipsoide uniformemente cargado con carga Ze, este valor se puede aproximar como $\mathbb{Q} = (2/5)Z(b^2 - a^2)$, con b a lo largo del eje z. Como la deformación no es tanta, por lo que en lugar de decir que es elipsoidal el núcleo, decimos que es eferoidal (no llega a ser esférico, pero tampoco elipsoidal), podemos aproximar el radio por un promedio $\overline{R} = (1/2)(a + b)$, teniendo un desviación $\Delta R = b - a$, y así definimos un factor de deformación $\delta = \overline{R}/\Delta R$. El momento cuadrupolar se convierte en:

$$\mathbb{Q} = \frac{4}{5} Z R^2 \delta. \tag{3}$$

Aunque si nos ponemos formales, para obtenerlo en el formalismo de la mecánica cuántica, debemos sustituir $\rho(r)$, que es una densidad de probabilidad, por $\psi *_{m=j} \psi_{m=j}$ y sustituyendo en 2. Siguiendo en la aproximación podemos dar un momento cuadrupolar reducido, como:

$$\mathbb{Q}_{red} = \frac{\mathbb{Q}}{ZR^2},$$

con 3 vemos que para un elipsoide uniformemente cargado el momento cuadrupolar es proporcional al factor de deformación:

$$\mathbb{Q}_{red} = \frac{4}{5}\delta.$$

En la figura 7 pueden verse algunos de los valores obtenidos experimentalmente para núcleos con número impar de nucleones (sean protones o neutrones). El modelo de capas no logra explicar momentos cuadrupolares tan grandes como los mostrados en los picos más altos, tampoco acierta en varios de los casos en el signo.

Por ejemplo, para le ^{17}O (doble mágico más un neutrón) basta una deformación de $\delta = 0{,}07$ para obtener el valor observado de $-2{,}5fm^2$, en comparación al predicho por el modelo de capas de $-0{,}1fm^2$.

Espectro rotacional

Si el núcleo está deformado, ya no es esférico, entonces se puede identificar su posición respecto a los ejes de coordenadas arbitrarios que queramos definir. En particular en coordenadas esféricas la posición puede ser dada por un conjunto de ángulos. Pero, como es costumbre en cuestiones cuánticas, habrá

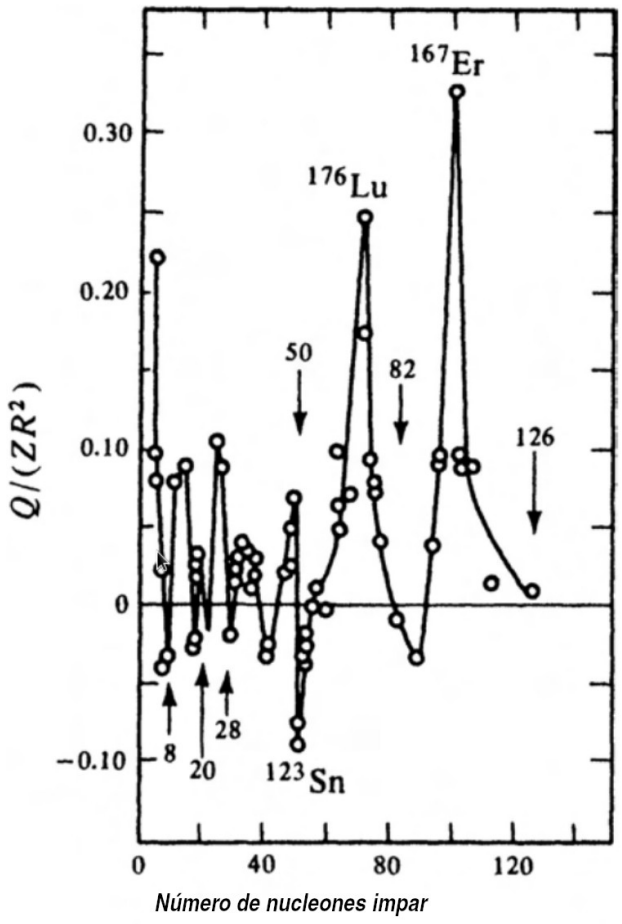


Figura 7: Momentos cuadrupolares reducidos como función del número de nucleones impar. Las flechas muestran los lugares de capa cerrada. Imagen tomada y adaptada de [2] con fines educativos.

una incertidumbre entre la coordenada del ángulo ϕ y el operador de momento angular orbital correspondiente, $L_\phi = -i\hbar(\partial/\partial\phi)$:

$$\Delta\phi\delta L_\phi \geq \hbar$$

En la figura **??** puede verse el espectro rotacional para el ^{170}Hf que es un núcleo bastante deformado.

Rotación alrededor del eje 1

$$H_{rot} = \frac{R^2}{2\mathbb{I}}$$

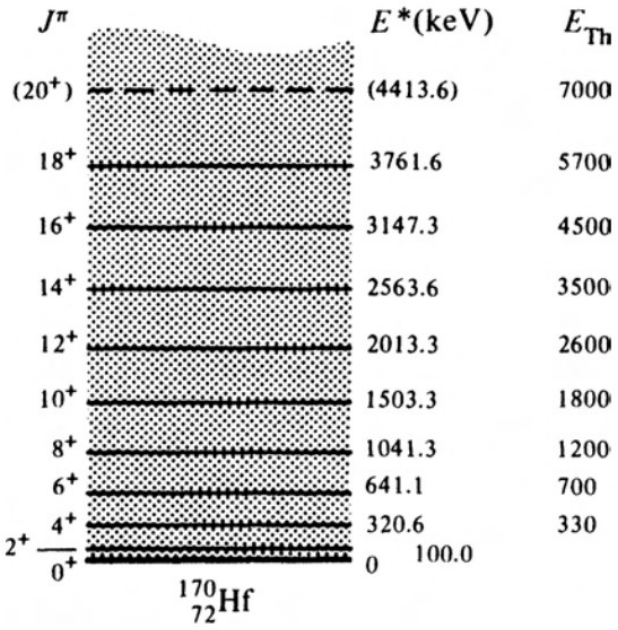
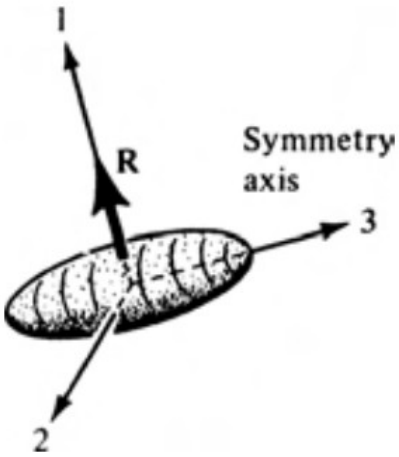


Figura 8: Espectro rotacional del núcleo deformado ^{170}Hf



Traduciendo a mecánica cuántica:

$$\hat{H}_{rot}\psi = \frac{\hat{R}^2}{2\mathbb{I}}\psi = E\psi$$
$$\hat{R}^2 Y_J^M = J(J+1)\hbar^2 Y_J^M,$$
$$J = 0, 1, 2, ...$$

Con la paridad dada por $(-1)^J$, sólo se aceptan valore par de J

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathbb{I}} J(J+1),\ J = 0, 1, 2, ...$$

Referencias

[1] Das, A., Ferbel, T. "Introduction to Nuclear and Particle Physics", Segunda edición, World Scientific Publishing Co., 2003.

[2] Henley, Ernest M., García, Alejandro "Subatomic Physics", Tercera edición, World Scientific Publishing Co., 2007.